Математическое развитие младших школьников: теоретические предпосылки

И.В. ШАДРИНА,
кандидат педагогических наук, доцент, Московский городской педагогический университет

Вопросы математического развития школьников стали предметом обсуждения математической общественности с середины прошлого века. Так, академик А.И. Маркушевич считал необходимым разработку целостной программы математического развития в силу того, что задача математического развития или математического воспитания учащихся является важнейшей в общем образовании. Математическое развитие младших школьников выдвигается Государственным образовательным стандартом начального общего образования второго поколения в качестве одной из приоритетных целей обучения [3][1]. Математическое развитие младших школьников имеет особую значимость, потому что:

1) математические знания, приобретаемые в начальной школе, составляют фундамент математического образования, на этой ступени обучения закладываются основы исходных математических понятий, таких, как *число, величина, геометрическая фигура, алгебраическая операция*;

2) в младшем школьном возрасте начинается развитие навыков дедуктивного мышления, абстрактного уровня восприятия и осмысления окружающей действительности, наиболее явно представленных в математике;

3) младший школьный возраст сенситивен для усвоения разных языковых кодов, а математика, в частности, — это язык описания количественных и структурных свойств материальной или идеальной реальности.

В работах педагогов-математиков математическое развитие чаще всего отождествляется с развитием математического мышления. Так, А.В. Белошистая, специально исследовавшая проблему математического развития ребенка в системе дошкольного и начального школьного образования, понимает под математическим развитием целенаправленную методическую работу по формированию и развитию совокупности взаимосвязанных базовых свойств и качеств математического мышления детей.

В то же время единого мнения о понятии *математическое мышление* в психолого-педагогической и методической литературе нет. Так, выделяемые чаще всего такие его свойства, как абстрактность, логичность, способность к формализации, обобщению и др., таковы, что они характеризуют мышление в любой содержательно насыщенной предметной области. Некоторыми исследователями специфика математического мышления связывается со своеобразием содержания математики, предметом изучения которой являются объекты, создаваемые самой математикой. Таким образом, достижение цели математического развития в практике обучения требует уточнения самого понятия *математическое развитие* и выявления психолого-педагогических и методических средств, способствующих его достижению.

Развитие как психолого-педагогическая категория подразумевает развитие жизненного опыта обучающихся — построение человеком своего образа окружающего мира, своего образа в этом мире и образа своего «Я». С этой позиции математическое развитие младших школьников, являясь частным случаем развития жизненного опыта человека, трактуется нами как *процесс построения ребенком своего математического обра-*

[1] В квадратных скобках указан номер работы и страницы в ней из списка «Использованная литература». — *Ред.*

за мира и своего образа в этом мире. Это значит, математическое развитие определяется, прежде всего, своеобразием математики как специфического орудия познания, своеобразием создаваемых ею объектов, которые существуют *только как мысленные идеальные образы*, связь которых с материальным миром опосредована и неочевидна.

Являясь результатом многоуровневой абстракции, каждый математический объект репрезентируется специальными знаками, образующими вместе с правилами действий над ними математический язык (языком в современной логике называют любые системы знаков, используемые в человеческом общении). Синтаксис математического языка представляет собой достаточно обширную систему правил, но основные трудности в построении математического образа мира связаны не с его формальной структурой.

Знаково-символическое обозначение математического объекта — его имя, а сам объект — денотат (значение) имени. Денотат имени — это мысленный образ, формирующийся в процессах познания выделяемых свойств реальности, в котором отражен как материальный мир, так и деятельность познающего субъекта в этом мире. Например, денотатом имени 2 + 3 является число 5. Но содержание этого имени не исчерпывается денотатом. Так, имена 2 + 3 и 5 обозначают один и тот же объект, но, очевидно, имеют различное содержание. Поэтому каждому имени приписывается еще один род содержания — его смысл. Смысл — это то, что усвоено, когда понято имя. В то же время «Смысл (концепт денотата) однозначно и единственным образом определяет денотат» [6, *18*]. Например, знание смысла имени 2 + 3 подразумевает знание смыслов всех составляющих его имен, что позволяет однозначно определить его значение.

Нетрудно видеть, что необходимым условием построения учеником своего математического образа мира является знание содержания всех имен изучаемых объектов, их значений и смыслов. Вместе с тем способы репрезентации математических объектов не связаны однозначно со знаками определенной семиотической системы. Кодирование математической информации может осуществляться знаками различных семиотических систем. При этом то, что сохраняется при правильном перекодировании, т.е. выделяемый по принципу «знак — содержание — знак» инвариант сообщения, согласно А. Черчу, является смыслом имени изучаемого объекта [6]. Отсюда следует: описание объекта познания знаками различных семиотических систем и осуществление взаимно обратимых переводов информации с одного языка на другой является одним из важнейших условий усвоения обучающимися смысла математических объектов.

Свои познавательные функции знаки (символы, слова) выполняют не только благодаря тому, что закрепляют сформированные понятия, они снижают непродуктивную мыслительную активность в процессе оперирования понятиями, дают возможность хранить понятия в свернутом виде. Они удобнее и доступнее, чем репрезентируемое ими содержание, но именно поэтому в условиях обучения они являются обоюдоострым орудием. В сознании учащихся знак может неправомерно доминировать над тем содержанием, которое он обозначает [4]. Если такое доминирование имеет место в процессе обучения, то акцент в познании переносится на усвоение способов оперирования именами изучаемых объектов, т.е. правил оперирования формальными схемами, правил синтаксиса математического языка в ущерб его семантике.

В таком случае усвоение школьниками содержания математических объектов идет в направлении «от знака к смыслу». Действительно, решая познавательные задачи, ученик оперирует знаками согласно правилам синтаксиса математического языка. Эти правила и выступают непосредственным предметом усвоения, а самая трудная часть работы по усвоению смысла познаваемых объектов перекладывается на ученика, который стихийно выстраивает их понятийные образы и далеко не всегда адекватно их онтологической сущности. В итоге ребенок оказывается не в состоянии выйти за пределы узких формальных схем, что выражается в неумении решать сколько-нибудь содержательные задачи, связанные с познанием исследуемых фрагментов действительности, что и означает отсутствие математического образа мира.

Логически в процессе обучения возможен противоположный подход к раскрытию содержания математических объектов, а именно подход, при котором интеллектуальная деятельность познающего субъекта направляется *от смысла к знаку*, когда знак возникает только как обозначение уже известного, тем или иным образом сформированного смысла. Например, если при вычислении значения суммы познавательная деятельность складывается из следующих действий ученика: 1) создаются множества, не имеющие общих элементов, мощности которых есть складываемые числа; 2) эти множества объединяются; 3) находится мощность объединения, — то в этом случае ученик оперирует не формальными схемами — именами чисел, а самими числами, которые изображаются наглядно конкретными представителями соответствующих классов эквивалентности и наглядным образом сложения таких чисел. В процессе осуществления подобных действий формируется смысл изучаемых понятий, а используемые символы только репрезентируют этот смысл, который хранится в сознании в форме понятийного образа.

Если понятийные образы сформированы, то, решая познавательные задачи, ученик оперирует не только и не столько знаковыми схемами, сколько самими математическими объектами. Результатом решения в этом случае является субъективно новое для ученика знание о математических методах познания и вместе с тем расширение и углубление его математического образа мира. По мере усложнения математического опыта познающего субъекта мысленные образы математических понятий обогащаются, оставаясь открытыми для дальнейшего уточнения [8]. С другой стороны, познавательная деятельность, основываемая на выявлении смысла изучаемых понятий, ведет к формированию понятийных образов, адекватных объективному содержанию понятия.

Психолого-педагогические исследования понятийного мышления показывают, что «образы, возникающие в условиях понятийного познания, нельзя рассматривать всего лишь в качестве чувственной основы понятийной мысли, некоторого наглядного ее аккомпанемента» [5, *123*]. Согласно М.А. Холодной, понятийный образ имеет сложную, иерархически организованную структуру, включающую когнитивные компоненты разного уровня обобщенности (от психомоторных до абстрактно-логических): словесно-речевой, визуально-пространственный, чувственно-сенсорный, операционально-логический и др.

В то же время понятийный образ, в отличие от представлений, которые классифицируются по модальности (зрительные, слуховые, тактильные и др.), представляет собой, прежде всего, пространство движения мысли, в котором представления выполняют функцию поддержки математической мысли и содержатся внутри него как его неотъемлемая часть. Но мысленный понятийный образ — не картинка, которую одна часть мозга «показывает» другой. Он образует семантическое поле, синтезирующее различные составляющие когнитивного опыта, в которое включаются содержательные связи с другими понятиями. В такой структуре отражается не только материальный мир, но и действия субъекта в нем. В ней идеальный абстрактный математический объект «опредмечивается», обеспечивая «видение» его семантических признаков.

Известно, что доминирующим в познавательной деятельности учеников 6–10 лет является правое полушарие мозга, отвечающее по преимуществу за образное, интуитивное, визуальное мышление, играющее ведущую роль в процессах понимания и творчества. Для младших школьников, мышление которых предметно, целостно и креативно, мысленные образы изучаемых понятий составляют ту основу, без которой сознательные усилия по поиску решения познавательных задач практически невозможны. Ж. Пиаже показал, что их формирование происходит на основе первоначальных предметных действий, при которых объектом абстракции являются сами действия, а не предметы эксперимента. Такого рода эксперимент Ж. Пиаже называет математическим, в отличие от эксперимента физического, при котором просто запоминается результат эксперимента [1, *30*]. Так, в эксперименте по вычислению значения выражения, описанном выше, при котором интеллектуальная деятельность направляется *от смысла к знаку*, предметом абстракции являются действия, раскрывающие смысл сложения мощностей конечных множеств. При этом, наряду с чувственно-сенсорными, формируются визуально-пространственные когнитивные компоненты понятийного образа.

Как правило, познавательная задача предъявляется младшему школьнику в словесно-речевой форме, описывающей некоторую учебную ситуацию. В силу доминирования правого полушария мозга в познавательной деятельности ученика наглядные представления информации для него более доступны. Они дают возможность охватить ситуацию целостно, тогда как речевое сообщение, развертывающееся последовательно, дискретно, воспринимается школьником значительно сложнее. Поэтому необходим перевод вербальной информации в пространственно-предметную форму, такое ее перекодирование, которое обеспечивает непосредственное и целостное видение учеником содержания сообщения. При этом для него открывается возможность оперировать предметными заместителями элементов рассматриваемой ситуации, возможность осуществления математического эксперимента, совершения действий, абстрагирование которых ведет преимущественно к формированию чувственно-сенсорных компонентов понятийного образа.

Но восприятие учеником тех характеристик подлежащей рассмотрению ситуации, которые составляют собственно математическую информацию, содержащуюся в сообщении неявно, такой перевод обеспечить не может. Для младшего школьника необходимо наглядное представление количественных и структурных характеристик рассматриваемой ситуации, связей и отношений между ними, кодирующих собственно математическую информацию без «затемнения» привходящими обстоятельствами, абстрагирование которой способствовало бы формированию визуально-пространственных и операционально-логических когнитивных компонентов мысленного образа.

Средства, обеспечивающие такое описание, не могут быть произвольными, создаваемыми *ad hoc*[1]. Исходной основой такого наглядного кодирования математической информации являются графические представления изучаемых математических понятий, обеспечивающие адекватность их онтологической сущности. Например, кодирование сложения чисел — мощностей конечных множеств основывается на определении сложения как мощности объединения множеств, мощности которых — складываемые числа, а сложение чисел — мер величины основывается, с одной стороны, на свойстве непрерывности скалярных величин, а с другой — на свойстве аддитивности меры. Такие коды мы назвали языком *визуальной семантики*. Его особенность состоит в том, что наглядное кодирование знаками такого языка абстрактных характеристик ситуации сохраняет видимую связь с теми конкретными объектами, математическая информация о которых является предметом исследования, и вместе с тем знаки такого языка являются достаточно обобщенными, чтобы быть применимыми к реальным объектам различной природы. Именно в этом его существенное отличие как от математического, так и от естественного языка, не имеющего ничего общего с теми объектами, которые они обозначают. В то же время эти коды обеспечивают связи со специальной математической символикой. Описание математической информации знаками языка визуальной семантики выполняет не только и не столько наглядную, сколько семантическую функцию, способствуя усвоению значения и смысла изучаемых объектов [8].

Кодирование математической информации средствами языка визуальной семантики включает в интеллектуальную деятельность познающего субъекта (наряду с

[1] *Ad hoc* — латинская фраза, означающая *для данного случая*.

чувственно-предметными и визуально-пространственными когнитивными компонентами мысленного образа) его операционально-логические компоненты, с помощью которых становится «видимым» сам процесс мышления. Последующий перевод такой наглядно представленной информации на собственно математический язык замыкает когнитивные компоненты понятийного образа в единую структуру, в которой содержание понятия представлено в индивидуальном сознании, в том числе некоторой наглядной схемой (эйдосом) класса объектов, составляющих его объем. Кодирование информации знаками различных семиотических систем приводит к тому, что обучающийся репрезентирует используемыми знаками только то содержание, которое уже представлено в понятийном образе, и в то же время понятийный образ в процессе такой деятельности обогащается за счет включения в него нового опыта [7].

Таким образом, познавательная деятельность младшего школьника по усвоению смысла математических объектов включает кодирование исследуемой информации знаками четырех различных семиотических систем: вербально-речевой, предметно-наглядной, визуально-семантической, знаково-символической. Среди них наивысшим уровнем обобщенности обладает знаково-символический код, образующий математический язык, а наименее обобщенный уровень кодирования представлен предметно-наглядным кодом. Визуально-семантическое кодирование, образуя промежуточный уровень обобщенности, играет в то же время роль связующего звена между предметно-наглядным и знаково-символьным кодом. При этом деятельность школьника по кодированию и перекодированию одной и той же информации позволяет ему выявить инвариант — смысл сообщения. Каждый способ кодирования вносит необходимые для полноты понятийного образа когнитивные компоненты, отражая инварианты как чувственно-конкретного, так и предметно-смыслового опыта человека, которые не всегда могут быть вербализованы и, значит, логически обоснованы.

Европейский рационализм Нового времени, имеющий истоки в эллинизме, знаменовал отказ от мышления в образах как архаического. Современные исследования сложных систем все более приводят к необходимости включения образного мышления в процессы познания. Положение об эстетической, а не логической природе математики было сформулировано выдающимся французским математиком А. Пуанкаре, который утверждал эвристическую роль эстетического начала в математике.

Согласно А. Пуанкаре, если сознательный поиск решения задачи вызывает интеллектуальные затруднения, то подключается бессознательный импровизационно-комбинаторный механизм и те комбинации идей, которые удовлетворяют эстетическому критерию, могут передаваться на уровень сознания. Это можно трактовать как математическую интуицию. Результат работы такого механизма воспринимается как мгновенное озарение (инсайт), идея, позволяющая осознать характеристики ситуации как единое взаимосвязанное целое. Те идеи, которые удовлетворяют эстетическому критерию, переходят на уровень сознания и потому подлежат сознательной проверке с помощью оперирования синтаксическими правилами математического языка [2]. Но подключение бессознательного импровизационно-комбинаторного механизма возможно только в том случае, если сознательными интеллектуальными усилиями сформированы мысленные образы тех математических объектов, в «усмотрении» взаимосвязей между которыми заключается решение.

Отсюда следует, что в процессе решения учебной задачи можно выделить несколько этапов: этап ее осознания, сознательного поиска решения путем создания мысленного образа исследуемой ситуации; если решение не достигается, то включается бессознательный комбинаторно-импровизационный механизм — этап инкубации; этап озарения (инсайт) — осознания идеи решения; последний этап — этап изложения и проверки. Достаточно ясно, что указанные этапы имеют место при решении не только математических, но и задач любой содержательно насыщенной предметной области, если только задача не является тривиальной.

Развиваемый здесь подход к проблеме математического развития младших школьников выявляет, прежде всего, гуманитарный потенциал математического образования, так как дает учащимся возможность осознать математический язык как речь особого свойства, частный случай языковой системы, открывая пути интеграции в начальном образовании. В процессах кодирования и перекодирования информации открываются возможности воспитания у школьников культуры мышления, характеризующейся интеллектуальной ясностью, простотой научных конструкций, наглядной конкретностью понятий. Кроме того, при этом подходе у младших школьников развивается необходимое в условиях познания сложных систем образное мышление.

Таким образом, математическое развитие младших школьников, понимаемое как становление в сознании учащихся своего математического образа мира, осуществляется в процессе формирования понятийных образов математических объектов путем кодирования и перекодирования информации знаками различных семиотических систем, в которых представлены инварианты чувственно-конкретного и предметно-смыслового опыта познающего субъекта, выявляющие смысл и значение изучаемых математических понятий. В таком процессе школьник осваивает математические методы познания реального мира в гармоническом сочетании формально-логических и понятийно-образных способов мышления.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Пиаже Ж.* Структуры математические и операторные структуры мышления // Преподавание математики. М., 1960.

2. *Пуанкаре А.* Математическое творчество // Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. М., 1970.

3. Федеральный государственный образовательный стандарт начального общего образования. М., 2010.

4. *Хинчин А.Я.* О формализме в школьном преподавании математики // Изв. АПН РСФСР. Вып. 4. М.; Л., 1946.

5. *Холодная М.А.* Психология интеллекта. Парадоксы исследования. СПб., 2002.

6. *Черч А.* Введение в математическую логику. Т. 1. М., 1960.

7. *Шадрина И.В.* Понятийные образы в начальном математическом образовании // Герценовские чтения. Начальное образование. Т. 2. Вып. 1. СПб., 2011.

8. *Шадрина И.В.* Математическое развитие младших школьников. М., 2009.