ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Аргинская И.И., Ивановская Е.И., Кормишина С.Н.* Математика. Учеб. для 4 класса: В 2 ч. Ч. 1. Самара, 2012.
2. *Деменева Н.Н., Рунова Т.А.* Анализ результатов экспериментальной проверки качества образования в начальной школе по математике // Нижегородское образование. 2012. № 4.
3. Оценка достижения планируемых результатов в начальной школе. Система заданий: В 2 ч. Ч. 1 / Под ред. Г.С. Ковалевой, О.Б. Логиновой. М., 2009.
4. Примерная основная образовательная программа образовательного учреждения. Начальная школа. М., 2010.
5. *Рудницкая В.Н., Юдачева Т.В.* Математика: Учеб. для 4 класса: В 2 ч. Ч. 2. М., 2013.
6. *Смолеусова Т.В.* Проекты по математике как методическая инновация // Начальная школа. 2013. № 8.

Нестандартные задачи в обучении математике

И.В. ШАДРИНА

кандидат педагогических наук, доцент, Институт педагогики и психологии образования Московского городского педагогического университета

Результаты международных исследований (PIRLS, PISA, TIMSS) свидетельствуют, что российские младшие школьники, как правило, демонстрируют успешное применение знаний в стандартных ситуациях. Использование тех же знаний в ситуациях, измененных даже незначительно, вызывает трудности или отказ от решения предложенной задачи [1, *3*][1].

Исследователи видят причину такого положения дел в том, что почти 70–80 % заданий, предъявляемых школьникам в процессе обучения, носят репродуктивный характер, направляя познавательную деятельность учеников на заучивание и воспроизведение знаний и умений, их использование в тех ситуациях, в которых данное знание формировалось [1, *4*].

В то же время формирование умений применять математические знания в процессе выполнения достаточного количества, вообще говоря, однотипных упражнений является необходимым условием их усвоения. Существует обратная сторона данного положения — усваиваемые знания приобретают формальные качества, что затрудняет не только их использование в ситуациях, отличающихся некоторой новизной, но и понимание, в результате чего снижаются перспективы достижения как познавательных, так и развивающих результатов обучения. При этом воздействие на способности, желания и волевые усилия ученика мало зависит от целенаправленной деятельности учителя. Таким образом, наблюдается противоречие между необходимостью использовать репродуктивные методы обучения математике и формированием умений применять знания в процессе решения учебных и практических задач.

Разрешение указанного противоречия, по нашему мнению, возможно при внесении в обучение математике элементов поисково-исследовательской деятельности, результативным инструментом организации которой являются занимательные задачи, выполняющие в первую очередь функцию мотивации. Причем задачи решение которых «не подходит» под известные выработанные в процессе упражнений стереотипы, должны предъявляться не факультативно во внеурочной деятельности, а на

[1] В квадратных скобках указаны номер работы и страница в ней из списка «Использованная литература». — *Ред.*

уроке, где формируются не только умения применять знания в нестандартной ситуации, но, что не менее важно, возбуждается интерес к поиску решения, в отличие от поиска подходящего аналога из тех, что уже освоены школьниками.

Чтобы занимательные задачи, предлагаемые на уроке, могли выполнять указанные функции, они должны отвечать следующим требованиям:

- быть доступными, т.е. опираться только на знания, которые школьники усвоили;
- знакомить с новыми математическими идеями, применимыми к решению внешне различных проблемных ситуаций;
- формировать умения представлять математическую реальность, репрезентируемую текстами заданий, в том числе с применением наглядных средств;
- способствовать разрушению стереотипов, например, уверенности в обязательном существовании решения и только одного;
- включать каждого ученика в активную интеллектуальную деятельность на основе организации учебного диалога.

На примере задач, отвечающих указанным требованиям, покажем возможные подходы к проектированию поисково-исследовательской деятельности в процессе их решения.

Задача 1. После полета на Луну Незнайка решил заняться арифметикой, но найти число, у которого единиц в разряде десятков в 3 раза больше, чем единиц в разряде единиц, ему никак не удавалось. Помогите ему.

Поисковая деятельность младших школьников направляется учителем, организующим учебный диалог.

Учитель. Что вы хотите подсказать Незнайке?

1-й ученик. Число, которое надо найти, — двузначное, у него два разряда: разряд десятков и разряд единиц.

2-й ученик. В каждом разряде может стоять только однозначное число.

3-й ученик. Незнайке надо знать, какие это числа?

2-й ученик. Таких чисел много!

1-й ученик. Нет, их немного. Это числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

2-й ученик. Если Незнайка найдет, какое число стоит в разряде единиц, то легко узнает и число единиц в разряде десятков. Известно, что их в 3 раза больше.

4-й ученик. Интересно, какое же число может быть в разряде единиц?

3-й ученик. Об этом ничего не сказано.

1-й ученик. В разряде единиц может быть любое однозначное число.

2-й ученик. Я возьму число 5, умножу его на 3, получу 15, но 15 — двузначное число, оно не может быть числом единиц в разряде десятков.

4-й ученик. Я знаю число, которое требуется найти Незнайке, — это 93. Ведь 9 в 3 раза больше 3.

Учитель. Верно. 93 — это число, которое является решением задачи. Но, может быть, существуют и другие решения?

3-й ученик. А 4 может быть в разряде единиц?

1-й ученик. Нет, не может, $4 \cdot 3 = 12$. В разряде единиц не могут стоять и числа 6, 7, 8, 9. Их произведения на 3 — двузначные числа, они не могут быть числом единиц ни в каком разряде.

2-й ученик. Числа 2 и 1 подойдут. Умножим их на 3, получим 6 и 3. Тогда числа 62 и 31 — тоже решения Незнайкиной задачи.

4-й ученик. Число единиц в разряде может быть и нулем.

1-й ученик. Но $0 \cdot 3 = 0$, в разряде десятков двузначного числа не может стоять 0. Поэтому 0 не может быть и в разряде единиц.

Учитель. Какие числа нужно найти Незнайке?

Ученики. Это числа 93, 62 и 31.

Учитель. Как вы их нашли?

Ученики. Среди однозначных чисел мы подобрали такие, произведения которых и числа 3 также являются однозначными.

Учитель. Что должен знать Незнайка, чтобы решить задачу?

Этот вопрос ведет учеников к рефлексии, осознанию того, как знания могут применяться в необычных условиях.

5-й ученик. Ему надо знать, что такое однозначное и двузначное число.

Рис. 1.
Схематическое изображение отношения возраста сестры к возрасту брата

6-й ученик. Еще надо знать, какие числа могут стоять в разряде единиц и десятков.

7-й ученик. Надо знать, что число, которое в 3 раза больше данного, получается умножением на 3.

С точки зрения освоения школьниками математических методов решение данной задачи обогащает их интеллектуальный багаж методом перебора возможных случаев и рассуждением от противного: допустив некоторое утверждение, они пришли к противоречию с известными фактами.

Решение занимательной задачи может стимулировать умения выявлять смысл текста, который репрезентирует математический объект, неявно задаваемый данным текстом.

Задача 2. Когда брата спросили, сколько лет ему и его сестре, он ответил: «Сейчас мне вдвое больше лет, чем тогда, когда мне было столько лет, сколько лет сестре теперь, а обоим вместе нам 21 год». Сколько лет брату и сколько лет сестре?

Решение этой задачи знакомит с приемом декодирования текста посредством анализа его логической структуры и представления искомого объекта графической схемой. Ученикам нужно выделить искомый объект, задаваемый сложной синтаксической конструкцией. Соответствующая деятельность может быть организована в вопросно-ответной форме.

Учитель. Брат утверждает, что когда-то его возраст был таким же, каков возраст сестры сейчас. Можно ли отсюда заключить, кто старше: брат или сестра?

1-й ученик. Да, можно: брат старше сестры.

Учитель. Брат утверждает, что сейчас ему вдвое больше лет, чем было тогда, когда его возраст равнялся возрасту сестры. Можно ли отсюда сделать вывод об отношении возраста брата тогда к его возрасту сейчас?

1-й ученик. Да, сейчас брат в 2 раза старше того, каким он был тогда.

Учитель. Какой отсюда следует вывод об отношении нынешнего возраста брата к нынешнему возрасту сестры?

3-й ученик. Сейчас брат в 2 раза старше сестры.

Это рассуждение, результат которого можно сделать наглядным (рис. 1), обучает важному умению делать выводы из явно сформулированных посылок. На рис. 1 верхний отрезок обозначает возраст сестры, а нижний — брата. На нем видно, что 21 год состоит из трех одинаковых частей, равных возрасту сестры.

Отсюда получаем: сестре 7 лет, а брату 14.

Задача 3. У Киры 27 руб. Она знала, что тетрадь стоит больше 27 руб., но не знала ее цену. Степа сказал, что тетрадь на столько же дороже 27 руб., на сколько 35 больше цены тетради, и это число не больше 6. Сколько рублей надо добавить Кире, чтобы купить тетрадь?

Задача интересна тем, что допускает два достойных внимания метода решения: арифметический и алгебраический, отличающиеся последовательностью рассуждений.

Полагая, что арифметический метод несет больший познавательный и развивающий эффект, рассмотрим сначала ход мысли, который можно охарактеризовать как рассуждение «с конца». Требуется найти число, вычитая которое из 35 получим число, равное его сумме с числом 27. Известно, что это число *не больше 6*. Числа не больше 6 — 0, 1, 2, 3, 4, 5 и само число 6. Ясно, что 0 не отвечает условиям задачи: $27 + 0 \neq 35 - 0$.

Проверка чисел 1, 2 и 3 показывает, что они также не удовлетворяют условию, а требуемое число 4. Действительно, $35 - 4 = 31$, $27 + 4 = 31$.

Таким образом, решение задачи методом перебора значений, заданных неравенством «не больше 6», составляет одну из методических ценностей данного задания.

Рассуждение: «Если число, которое необходимо прибавить к 27, обозначить буквой x, то $27 + x$ должно быть равно

Рис. 2.
Исходное положение Винни-Пуха и Пятачка

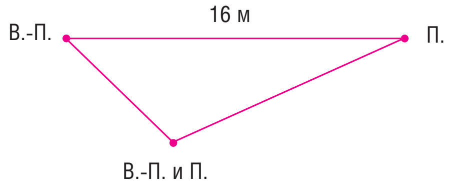

Рис. 3.
Изображение прямых, по которым двигались Винни-Пух и Пятачок

35 – x» приводит к составлению уравнения $27 + x = 35 - x$.

Оно также решается подбором подходящего числа из тех, что не превышают 6, что приводит к пониманию понятия *решение уравнения*, с одной стороны, как его корня, а с другой — как процесса решения методом подбора. Алгебраическое решение данной задачи является в то же время пропедевтикой овладения новым перспективным методом решения текстовых задач.

Идея следующей задачи принадлежит И.Ф. Шарыгину [2, *80*], методическая ценность которой заключается в том, что поиск решения задачи активизирует целый комплекс математических знаний и стимулирует овладение умением рассматривать все возможные в данной ситуации случаи.

Задача 4. Дома Винни-Пуха и Пятачка находятся на расстоянии 16 м друг от друга. Однажды они вышли одновременно из своих домов, и каждый пошел по какой-то прямой. Винни-Пух проходил 3 м/мин, а Пятачок — 5 м/мин. Через некоторое время они встретились. Сколько времени могло продолжаться их путешествие?

Представление исходной ситуации дано на схеме рис. 2.

Поиск решения задачи 4 в формате учебного диалога можно провести следующим образом.

У ч и т е л ь. Как могли пойти Винни-Пух и Пятачок, если каждый двигался по прямой и они встретились?

1-й у ч е н и к. Они могли пойти навстречу друг другу и встретиться на дороге, соединяющей их дома.

2-й у ч е н и к. Пятачок шел быстрее Винни-Пуха, значит, они встретились в точке, которая ближе к дому Винни-Пуха.

3-й у ч е н и к. Каждую минуту расстояние между ними сокращалось на 3 + 5 = 8 (м). Время их движения до встречи равно 16 : 8 = 2 (мин). В этом случае друзья встретились бы через 2 мин.

1-й у ч е н и к. Они могли пойти по прямой в одном направлении и встретиться, если бы Пятачок двигался в сторону дома Винни-Пуха, а Винни-Пух шел в том же направлении. Через некоторое время Пятачок догнал бы Винни-Пуха, его скорость больше.

3-й у ч е н и к. Каждую минуту Пятачок был бы ближе к Винни-Пуху на 2 м. Друзья встретились бы тогда, когда разделяющее их расстояние в 16 м сократилось бы до нуля, т.е. через 16 : (5 – 3) = 8 (мин). В этом случае друзья встретились бы через 8 мин.

2-й у ч е н и к. В задаче не сказано, что они шли по прямой, которая проходит по дороге, соединяющей их дома!

1-й у ч е н и к. Они могли двигаться по разным прямым и все-таки встретиться, если бы дороги образовали треугольник (нетривиальная идея!).

На рис. 3 показаны их дорожки. Дорожка Пятачка длиннее дорожки Винни-Пуха. За то же время Пятачок проделает больший путь, так как его скорость больше.

У ч и т е л ь. Что можно сказать о времени их движения до встречи в этом случае?

4-й у ч е н и к. Путь, пройденный обоими друзьями, больше 16 м. Путь по прямой короче пути по ломаной из двух звеньев с теми же концами (неравенство треугольника).

5-й у ч е н и к. Значит, время их движения до встречи больше 2 мин.

1-й ученик. Если же они будут двигаться по этим прямым 8 мин, то путь, пройденный Пятачком, 5 · 8 = 40 (м), а Винни-Пухом 3 · 8 = 24 (м).

4-й у ч е н и к. Треугольник «вырождается» в прямую: 24 м + 16 м = 40 м.

1-й ученик. Время движения друзей в этом случае больше 8 мин.

Учитель. Сколько же возможных способов встретиться Винни-Пуху и Пятачку? Как зависит от них время движения?

5-й ученик. Три способа. Они могут идти навстречу друг другу, или в направлении от дома Пятачка к дому Винни-Пуха, или по пересекающимся прямым.

6-й ученик. Время движения до встречи тоже разное: самое малое 2 мин при движении навстречу и более 8 мин при движении по прямым, которые пересекаются в точке встречи.

Устное решение занимательных задач оказывает позитивное влияние на развитие продуктивного мышления в силу того, что актуализирует необходимые знания, вносит в ход урока игровые моменты, стимулирует скорость мышления, вносит дух соревнования. Например, устно могут решаться задачи:

— назвать наименьшее трехзначное (четырехзначное и др.) число, все цифры которого различны;

— найти три однозначных числа, сумма и произведение которых равны;

— узнать, за сколько минут 25 насосов выкачают 25 т воды, если 10 насосов за 10 мин выкачивают 10 т воды.

В заключение отметим, что занимательные задачи обогащают и усложняют математический опыт младших школьников, активизируют их поисково-исследовательскую деятельность, стимулируют интерес к математике. Создавая ситуацию мотивационного выбора, они способствуют мобилизации сил и энергии учащихся в направлении поиска новых методов познания, достижению результатов обучения, требуемых Федеральным государственным стандартом начального общего образования.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Из портфеля главного редактора. Типы уроков в начальной школе в свете требований ФГОС НОО // Начальное образование. 2014. № 3.

2. *Русанов В.Н.* Математические олимпиады младших школьников. М., 1990.

3. Федеральный государственный стандарт начального общего образования. М., 2011.

4. *Шарыгин И.Ф.* Геометрия. 7 класс. Теория, задачи. М., 1995.