Исследовательские задания по математике и умение доказывать

Л.П. СТОЙЛОВА,
кандидат педагогических наук, профессор, Московский городской педагогический университет

В настоящее время педагоги, методисты и ученые решают сложные задачи. Связано это, прежде всего, с тем, что меняется парадигма школьного образования, которая складывалась десятилетиями. При этом наиболее сложной является проблема формирования универсальных учебных умений, которые в основном связаны с развитием мышления учащихся, а их освоение требует соблюдения определенных условий, в частности, опоры на деятельностное понимание мышления.

Развитие мышления учащихся — неотъемлемая часть методической системы обучения математике. Известный математик, методист, автор школьных учебников, в том числе и для начальной школы, Г.В. Дорофеев писал: «Научить думать — главное назначение предмета математики в школе, а вовсе не в том, чтобы помнить километры математических формул и теорем. Объяснять, обосновывать свои рассуждения (т.е. доказывать) свои рассуждения необходимо любому человеку, независимо от его профессиональной деятельности» [2, 7][1]. В связи с этим формирование умения доказывать несложные математические утверждения является одной из важных задач начального обучения, поскольку овладение этим действием не только способствует усвоению изучаемого материала, но и служит основой дальнейшего обучения.

Рассмотрим некоторые понятия, связанные с доказательством. Более подробно об этом можно прочитать в нашем учебнике [3].

Доказательство — это логическая операция, в процессе которой обосновывается истинность какого-либо утверждения с помощью других, истинных и связанных с ним утверждений. Для этого строится конечная цепочка умозаключений, причем заключение каждого из них (кроме последнего) является посылкой в одном из последующих умозаключений.

Например, если требуется доказать истинность утверждения $4 \cdot 5 > 4 + + 4 + 4 + 4$, то, согласно определению умножения натуральных чисел как сложения одинаковых слагаемых, можно записать $4 \cdot 5 = 4 + 4 + + 4 + 4 + 4$, но сумма $4 + 4 + 4 + 4 + 4$ больше суммы $4 + 4 + 4 + 4$, следовательно, $4 \cdot 5 > 4 + 4 + 4 + 4$.

По способу введения различают *прямые* и *косвенные доказательства*. Прямое доказательство утверждения вида «Если A, то B» — это построение цепочки дедуктивных умозаключений, выполняемых от A к B с соблюдением правил логики и с помощью системы утверждений, истинность которых доказана. Приведенное выше доказательство является прямым.

Примером косвенного доказательства является доказательство методом от противного. Чтобы доказать, например, утверждение: «Любые две различные прямые пересекаются не более чем в одной точке», предположим, что число общих точек у двух прямых более одной. Тогда они должны совпадать, поскольку через две точки можно провести только одну прямую, но это противоречит условию утверждения, где сказано, что рассматриваются две различные прямые. Следовательно, наше предположение неверное, а данное утверждение истинно.

В математике широко используется и такой метод доказательства, при котором

[1] В квадратных скобках указан номер работы и страницы в ней из списка «Использованная литература». — *Ред.*

истинность утверждения следует из истинности его во всех частных случаях. Называют его *полной индукцией*. Например, этим методом можно воспользоваться для доказательства истинности утверждения «Сумма цифр[1] каждого произведения в таблице умножения на 9 равна девяти». Для этого необходимо найти все суммы, о которых идет речь:

1 · 9 = 9	9
2 · 9 = 18	1 + 8 = 9
3 · 9 = 27	2 + 7 = 9
4 · 9 = 36	3 + 6 = 9
5 · 9 = 45	4 + 5 = 9
6 · 9 = 54	5 + 4 = 9
7 · 9 = 63	6 + 3 = 9
8 · 9 = 72	7 + 2 = 9
9 · 9 = 81	8 + 1 = 9

Обобщив полученные результаты, заключаем, что сумма цифр каждого произведения в таблице умножения на 9 равна девяти.

Как известно, формирование любого умения возможно в рамках такой системы обучения, в которой для организации математической деятельности будут предложены соответствующие задания. Чтобы формировать умение доказывать, нужны упражнения, при выполнении которых учащиеся могли бы провести наблюдения, сопоставить наблюдаемые факты и сделать самостоятельные выводы, подметить ту или иную закономерность, обосновать свои действия и проверить правильность выдвинутых предположений. При этом необходимо учесть, что в начальном курсе математики нет слов *аксиома* и *теорема*. Здесь рассматривают свойства, правила, формулы. Например, изучаются свойства арифметических действий, правила нахождения периметра и площади прямоугольника. Кроме того, доказательство изучаемых утверждений, как правило, не выделяется, в учебниках приводятся поясняющие рассуждения.

Названным выше условиям (возможность вести наблюдение, формулировать гипотезу, проверять ее правильность) удовлетворяют задания, которые в настоящее время называют *исследовательскими*. Их выполнение моделирует исследовательскую деятельность учеников, которая заключается в постановке проблемы, анализе информации, выдвижении гипотезы, ее проверке, формулировке выводов, их обосновании. При этом выполнение исследовательского задания не всегда включает все этапы исследования, но обязательны гипотеза и ее проверка (доказательство). Подробнее об исследовательских заданиях при изучении математики в начальной школе можно прочитать в работе О.А. Ивашовой [1]. Вообще исследовательские задания являются естественным средством формирования у младших школьников умения доказывать, но формируется оно постепенно в процессе обучения и освоения соответствующей деятельности при выполнении исследовательских заданий. Рассмотрим их примеры.

З а д а н и е 1. Выучив таблицу умножения на 9, учащийся сделал вывод: «Если на 9 умножают четное число, то произведение четно, а если нечетное — нечетно». Верен ли вывод?

Убедиться в правильности такого вывода можно, если выписать из таблицы умножения на 9 все случаи умножения четных чисел и все случаи умножения нечетных. Обобщив полученные результаты, заключаем, что вывод верный.

Способ доказательства, который был использован в данном случае, — полная индукция. Название этого способа учащимся не сообщается, но важно подчеркнуть, что вывод сделан на основе рассмотрения всех частных случаев.

З а д а н и е 2. Из двузначного числа, у которого число десятков на 2 больше числа единиц, вычли другое число, записанное с помощью тех же цифр, что и первое, но в обратном порядке. Какое число получилось?

Это задание отличается от предыдущего тем, что в нем требуется сначала высказать предположение (гипотезу). Это можно сделать, рассмотрев 2–3 частных случая, например: 31 – 13 = 18, 97 – 79 = 18. На их основе можно предположить, что если из любого двузначного числа, у которого число десятков на два больше числа единиц, вычесть число, записанное с помощью тех же

[1] Речь идет о сумме чисел, записанных в разряде единиц и десятков.

цифр, что и первое, но в обратном порядке, то получится 18. Убедиться в истинности этого утверждения можно, рассмотрев все такие двузначные числа, о которых идет речь в задании, т.е. воспользоваться методом полной индукции.

Задание 3. Найти значение выражения 96 : 32 можно следующим образом: заменить каждое двузначное число суммой его цифр: 9 + 6 = 15 и 3 + 2 = 5, а затем разделить первый результат на второй: 15 : 5 = 3. Аналогично можно установить, что 48 : 24 = 12 : 6 = 2, 55 : 11 = 10 : 2 = 5. Можно ли утверждать, что таким образом можно найти значение частного любых двузначных чисел?

В данном случае мы имеем дело с ложным утверждением, и, чтобы убедиться в этом, надо найти опровергающий пример (контрпример). Так, 75 : 15 = 5, но 12 : 6 = 2, а 5 не равно 2. Выполнять такие задания целесообразно на внеурочных занятиях.

В завершение приведем примеры исследовательских заданий для младших школьников, выполняя которые они могут учиться вести доказательство методом полной индукции.

1. Задумайте однозначное число, которое не делится на 3. Умножьте его само на себя и разделите результат на 3. Всегда ли при этом получится остаток, равный 1?

2. Найдите произведения, которые получаются при умножении 18 на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Верно ли, что суммы цифр каждого числа одинаковы? Существуют ли еще двузначные числа, обладающие таким свойством, что и число 18?

3. Верно ли, что среди трех натуральных чисел всегда можно найти два, сумма которых делится на 2?

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивашова О.А.* Применение исследовательских заданий в занимательной форме для становления вычислительной культуры младших школьников// Начальная школа. 2009. № 8.

2. *Минаева С.С.* Воспитательный потенциал математики // Математика. 2014. № 12.

3. *Стойлова Л.П.* Математика: Учеб. для студентов учреждений высш. образования. М., 2014.

Использование мобильной естественно-научной лаборатории в исследовательской работе с младшими школьниками

Е.В. ПОЛЯКОВА,

учитель начальных классов, школа № 2, г. Болотное, Новосибирская область

Учебно-исследовательская деятельность младших школьников — одна из прогрессивных форм обучения в современной школе. Она позволяет наиболее полно выявлять и развивать как интеллектуальные, так и творческие способности учащихся. С педагогической точки зрения неважно, содержит детское исследование принципиально новую информацию или начинающий исследователь открывает уже известное. Здесь ценен сам исследовательский опыт. Именно опыт исследовательского, творческого мышления и является основным педагогическим результатом и наиболее важным приобретением младшего школьника.

В Федеральном государственном образовательном стандарте начального общего образования подчеркивается важность самостоятельной исследовательской и практической деятельности учащихся. Выпускник начальной школы должен уметь проводить эксперименты с помощью учебного лабораторного оборудования, включающего как привычные традиционные, так и современные цифровые измерительные приборы. Поэтому очень важно, чтобы школа с