О преподавании элементов теории множеств в начальной школе

А.А. ЛОКШИН,
доктор физико-математических наук, профессор
Е.А. ИВАНОВА,
кандидат физико-математических наук, доцент, Институт детства Московского педагогического государственного университета

Преподавание основ наивной теории множеств младшим школьникам, начавшееся, казалось бы, столь удачно, в последнее время столкнулось с неожиданными трудностями. Оказалось, что многие ученики начальной школы не понимают смысл понятия *равные множества*. Следует ли отсюда вывод, что не нужно пытаться вводить в начальной школе понятие *множество*, операции над множествами и диаграммы Эйлера? Ответ на этот вопрос далеко не очевиден.

В работах [1, 2][1] вполне убедительно продемонстрировано, что уже 5–6-летние дети успешно справляются с классификацией предметов по двум признакам, т.е. фактически работают с диаграммами Эйлера. Может быть, непонимание сути понятия *равные множества* связано не с тем, что психика младших школьников еще недостаточно созрела для восприятия такого сложного понятия, как *множество*, а в том, что взрослые по умолчанию предполагают некоторые соглашения выполненными, в то время как детям их нужно объяснять?

Приведем определение из учебника Л.Г. Петерсон [2, 7]: «Два множества **равны,** если они состоят **из одних и тех же элементов.** Если множества A и B равны, то пишут $A = B$. <...> Пусть A = {малина; земляника; смородина}, B = {земляника; малина; смородина} <...> $A = B$ (в них одни и те же элементы, только в разном порядке)».

После такого объяснения на уроке может возникнуть осложнение, о котором авторам сообщил доктор педагогических наук, профессор А.Л. Чекин. В качестве примера рассмотрим рис. 1, на котором схематически изображен шкаф с двумя полками.

На верхней полке стоят три банки варенья (например, вишневое, клубничное, земляничное). На нижней полке находятся **такие же** три банки, но в другом порядке. Совокупность трех верхних банок обозначается на рис. A', а совокупность трех нижних банок — B'. Учитель спрашивает ученика: «Равны ли множества A' и B'?». Ученик отвечает: «Да, равны».

Итак, мы столкнулись с серьезной проблемой: как объяснить ученику, что множества A' и B' не равны, если, глядя на подчеркнутые выше строчки из определения равных множеств A и B, он не заметит никакой разницы между определением равных множеств и рис. 1. Отличие, очевидно, заключается в том, что в приведенном выше определении в фигурных скобках перечислены имена объектов, а сами объекты (элементы множества) подразумеваются. Что же это за подразумеваемые объекты? В рассматриваемом случае это понятия, обозначаемые соответствующими словами. В то же время на рис. 1 присутствуют не имена объектов, а, напротив, сами объекты. Таким образом, работая с множествами, нам предстоит иметь дело с двумя разными ситуациями.

Ситуация 1. В фигурных скобках перечисляются имена объектов (элементов множества).

Ситуация 2. На рисунке присутствуют сами объекты (элементы множества).

Рассмотрим особенности каждой ситуации.

[1] В квадратных скобках указаны номер работы и страницы в ней из списка «Использованная литература». — *Ред.*

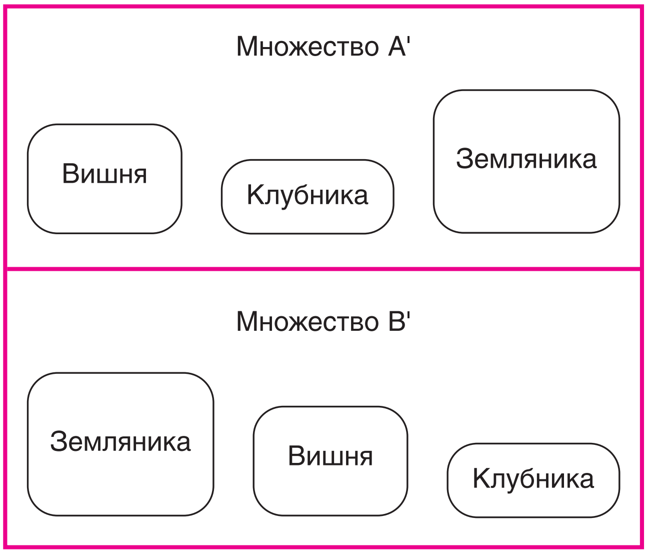

Рис. 1

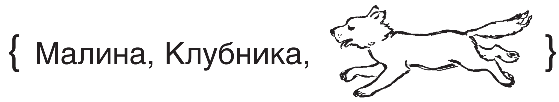

Рис. 2. Недопустимое перечисление элементов множества

В ходе анализа ситуации 1 важно обратить внимание на два условия.

Условие 1. В перечислении, записываемом в фигурных скобках, ни в коем случае не должны участвовать сами элементы, а должны присутствовать только их имена.

Условие 2. Из контекста должно быть ясно, каким объектам соответствуют перечисленные в фигурных скобках имена. Тогда недоразумения, связанные с «проблемой равных множеств», не возникнут.

Из указанного выше вытекает, что нам следует согласиться, например, со следующими равенствами множеств, заданных перечислением: {I, II, III, IV, V} = {1, 2, 3, 4, 5}; {клубника, малина} = {*МАЛИНА*, ***КЛУБНИКА***}.

При этом перечисление, аналогичное изображению на рис. 2, недопустимо вследствие его двусмысленности.

Конечно, можно специально договориться, что животное на рис. 2 — это имя какого-то объекта (а не сам объект). Однако лучше этого избежать и пользоваться для производства имен известными стандартными алфавитами.

В ходе анализа ситуации 2 также важно обратить внимание на два условия.

Условие 1. Как известно, в макромире не бывает абсолютно одинаковых объектов. Это обстоятельство необходимо всячески подчеркивать, а не затушевывать! Если бы банки с вареньем, изображенные на рис. 1, имели хотя бы самые незначительные индивидуальные признаки, ученик не смог бы ошибиться. Таким образом, объекты, присутствующие на рисунке, обязательно должны обладать индивидуальными признаками. Соблюдение этого условия исключит путаницу, при которой два разных множества принимаются за равные.

Условие 2. Соблюдение договоренности о способах многократного изображения одного и того же предмета (множества предметов). Остается еще неразобранным случай, когда нужно дважды (трижды, четырежды...) изобразить одно и то же множество. Например, показать на рисунке, что множество из трех банок варенья не изменится (останется равным самому себе), если мы поменяем две банки местами. Этого нетрудно добиться, например, таким способом: поместив на рисунок «живого» персонажа, переставляющего банки.

Перечисленные выше проблемы введения понятия *равные множества* связаны с различением понятий *такой же* и *тот же самый*. Если младшие школьники работают с карточками, которые (в отличие от рисунков на странице учебника) можно перекладывать, то эти проблемы, как правило, исчезают. Заметим в этой связи, что упомянутый выше «живой» персонаж не может быть «таким же», он обязательно «тот же самый»!

В заключение авторы приносят благодарность А.Л. Чекину за полезные обсуждения.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Звонкин А.К.* Малыши и математика. М., 2014.

2. *Петерсон Л.Г.* Математика. 3 класс. Ч. 1. М., 2004.

3. Формирование элементарных математических представлений у дошкольников / Под ред. А.А. Столяра. М., 1988.